２００４年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次

1.　福泉　麗佳 氏（北海道大）
非線形 Schrödinger 方程式の定在波解の安定性・不安定性について
(Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations) 1

2.　大本　亨 氏（北海道大）
特異点と特性類（同変チャーン類とトム多項式の話題から） 2

3.　Ding Guanghong 氏（Fudan University）
The Interstitial fluid flow in connective tissue and its numerical simulation 3

4.　板谷　淳一 氏（北海道大）
{兼 MCAS セミナー}
社会紛争モデル： 微分ゲームにおける非線形マルコフ完全均衡戦略について 5

5.　Chi- Sing Man 氏（University of Kentucky）
Crystallographic Texture and Residual Stress in Polycrystalline Solids: From Mathematical Theory to Industrial Applications 6

6.　小澤　徹 氏（北海道大）
非線型波動方程式の自己相似解　(Self-similar Solutions to Nonlinear Wave Equations) 7

7.　細野　忍 氏（東京大）
ミラー対称性、トーリック多様ｔ体、超幾何級数をめぐって
(Mirror Symmetries, Toric Varieties, Hypergeometric Series) 8

8.　Yanbo Wang 氏（Fudan University）
Numerical differentiation and its applications 9

9.　今野　紀雄 氏（横浜国立大）
確率セルオートマトンの双対性 10

10.　落合　啓之 氏（名古屋大）
超幾何っぽく見える／見えない微分方程式 11

11.　岩崎　克則 氏（九州大）{２００４年度日本数学会解析学賞受賞}
パンルヴェ方程式の幾何学 12

12.　泉屋　周一 氏（北海道大）
ミンコフスキー空間内の擬球面微分幾何とルジャンドル双対性について 13

13.　中垣　俊之 氏（北海道大）
{兼 MCAS セミナー}
あるアメーバ様生物がつくる輸送ネットワークの形と機能 14

14.　Timothy Logvinenko 氏（京都大）
G-Constellations and resolutions of quotient singularities 15

２００４年度　談話会・特別講演一覧

1. ５月１４日（金）＊福　泉　麗　佳　氏（北海道大）　非線形 Schrödinger 方程式の定在波解の安定性・不安定性について
(Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations)
2. ５月１４日（金）＊大　本　　亨　氏（北海道大）　特異点と特性類（同変チャーン類とトム多項式の話題から）
3. ５月２１日（金）＊Ding Guanghong 氏（Fudan University）　The Interstitial fluid flow in connective tissue and its numerical simulation
4. ６月　９日（水）＊板　谷　淳　一　氏（北海道大）　｛兼 MCAS セミナー｝ 社会紛争モデル：微分ゲームにおける非線形マルコフ完全均衡戦略について
5. ７月　６日（火）＊Chi- Sing Man 氏（University of Kentucky）　Crystallographic Texture and Residual Stress in Polycrystalline Solids: From Mathematical Theory to Industrial Applications
6. ７月２１日（水）＊小　澤　　徹　氏（北海道大）　非線型波動方程式の自己相似解
(Self-similar Solutions to Nonlinear Wave Equations)
7. ７月２１日（水）＊細　野　　忍　氏（東京大）　ミラー対称性、トーリック多様体、超幾何級数をめぐって
(Mirror Symmetries, Toric Varieties, Hypergeometric Series)
8. ９月３０日（木）＊Yanbo Wang 氏（Fudan University）　Numerical differentiation and its applications
9. １１月　９日（火）＊今　野　紀　雄　氏 (横浜国立大)　確率セルオートマトンの双対性
10. １１月２４日（水）＊落　合　啓　之　氏（名古屋大）　超幾何っぽく見える／見えない微分方程式
11. １２月２２日（水）＊岩　崎　克　則　氏（九州大）｛２００４年度日本数学会解析学賞受賞｝　パンルヴェ方程式の幾何学
12. １２月２２日（水）＊泉　屋　周　一　氏（北海道大）　ミンコフスキー空間内の擬球面微分幾何とルジャンドル双対性について
13. １２月２７日（月）＊中　垣　俊　之　氏（北海道大）　｛兼 MCAS セミナー｝ あるアメーバ様生物がつくる輸送ネットワークの形と機能
14. ２月２３日（水）＊Timothy Logvinenko 氏（京都大学）　G-Constellations and resolutions of quotient singularities

非線形 Schrödinger 方程式の定在波解の安定性・不安定性について
(Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations)

北大・理　福泉 麗佳 (Reika FUKUIZUMI)

We study the orbital stability of standing wave solutions $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ for the following nonlinear Schrödinger equations with a real valued potential $V(x)$:

$$i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u - |u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \tag{1}$$

We always assume $1 < p < 2^* - 1$, where $2^* = \infty$ if $n = 1, 2$, and $2^* = 2n/(n-2)$ if $n \geq 3$. $\phi_\omega(x)$, $\omega \in \mathbb{R}$ is a ground state of the following stationary problem

$$-\Delta\phi + V(x)\phi + \omega\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

When $V(x) \equiv 0$, (1) arises in various physical contexts such as nonlinear optics and plasma physics. The nonlinearity enters due to the effect of changes in the field intensity on the wave propagation characteristics of the medium. Equation (1) with a harmonic potential $V(x) = |x|^2$ and $n = p = 3$ is known as a model to describe the Bose-Einstein condensate with attractive inter-particle interactions under a magnetic trap.

Stability and instability of the standing wave solution for the case $V(x) \equiv 0$ has been well studied in 1980's. Cazenave and P. L. Lions proved that if $p < 1 + 4/n$ then the standing wave solution is stable for any $\omega > 0$. On the other hand, it is shown that if $p \geq 1 + 4/n$ then the standing wave solution is unstable for any $\omega > 0$ (Berestycki and Cazenave showed for $p > 1 + 4/n$, and M. I. Weinstein for $p = 1 + 4/n$).

Grillakis, Shatah and Strauss gave an almost sufficient and necessary condition for the stability and instability of stationary states for the Hamiltonian systems, including nonlinear Schrödinger equations with other nonlinearities, or other nonlinear evolution equations such as nonlinear Klein–Gordon equations. By the abstract theory by Grillakis, Shatah and Strauss, under some assumptions on the spectrum of linearized operators, the standing wave solution is stable (resp. unstable) at $\omega = \omega_1$ if the function $\|\phi_\omega\|_2^2$ is strictly increasing (resp. decreasing) at $\omega = \omega_1$. In the case $V(x) \equiv 0$, by the scaling invariance of (1), it is easy to check the increase and decrease of $\|\phi_\omega\|_2^2$. However, it seems difficult to check this property of $\|\phi_\omega\|_2^2$ for general $V(x)$.

When $-\Delta + V(x)$ has the first eigenvalue λ_1, Rose and Weinstein observed by numerical simulations that if $p > 1 + 4/n$, then $\|\phi_\omega\|_2^2$ would decrease for large ω, and that if $p \leq 1 + 4/n$, $\|\phi_\omega\|_2^2$ would increase for large ω. Moreover, they claimed that the standing wave solution is stable for ω such that $\omega > -\lambda_1$ and sufficiently close to $-\lambda_1$ using the standard bifurcation theory. However, the standard bifurcation theory would require nonlinearity to be regular enough, for example, $p \geq 3$.

In this talk, we present our results on the stability and instability of the standing wave solution for the case of general potentials $V(x)$ including unbounded ones. We explain the effect of the potential term and we show the different phenomenon from the case $V(x) \equiv 0$ which affirms the numerical simulations by Rose and Weinstein.

談話会 **特異点と特性類**（同変 Chern/Segre 類の理論）　5/14. 2004

大本　亨　北海道大学大学院理学研究科

前置き:古典的な“数え上げ幾何”の中に表れる多くの公式は（あまり知られていないですが）「Thom 多項式」としてある意味で統一的に扱うことが考えられます（講演中にいくつかの例を紹介します）．写像の特異点型 $\eta: \mathbf{C}^*, 0 \to \mathbf{C}^{*+k}, 0$ に対する **Thom 多項式** $tp(\eta)(c)$ とは，η のみに依存する $c_1, c_2, \cdots$ の重み付き同次多項式で次を満たすものです:適当に“generic”な写像 $M^m \to N^{m+k}$ に対して，η-型特異点集合 $\eta(f)$ の基本類の Poincaré 双対が $tp(\eta)(c)$ に $c_i = c_i(f) (:= c_i(f^*TN - TM))$ を代入したもので表示される，つまり $[\eta(f)] = tp(\eta)(c(f)) \frown [M]$（R. Thom 1955? - 計算方法等含めて理論的に整備され出したのは何故か 90 年代に入ってからです）．

ところで，X が非特異（既約）複素多様体の場合，$c(TX) \frown [X] = \chi(X) + \cdots + [X]$ であることに注意します．この概念を特異多様体 X に拡張したのが，Chern-Schwartz-MacPherson ホモロジー特性類 $C^{SM}(X) := C_*(1\!\!1_X) \in H_*(X)$ です:所謂 **MacPherson 変換**（1974）$C_*: \mathcal{F}(X) \to H_*(X)$（$\sum a_i 1\!\!1_{W_i} \mapsto \sum a_i \iota_* C^{SM}(W_i)$）は，**“ホモロジーに値を持つ Euler 標数積分”**と解釈されます（丁度，0-次 degree が $\chi(\ )$ を有限加法的測度と見なした（Viro の意味での）積分）．

本題:この C_* の同変版が本題の中心です．G を reductive linear algebraic group，X を G-variety とします（$k = \mathbf{C}$；あるいは quasi-projective, with linearlized action over k of $ch = 0$ でもよい）．X 上の G-同変構成的関数全体のなす Abel 群 $\mathcal{F}^G(X)$,（Totaro-Edidin-Graham の意味での）G-同変ホモロジー群 $H^G_*(X)$（$A^G_*(X)$）が定義され，次が成り立ちます–（ちょっと語弊はあるが，Euler 標数的“Haar 測度”で考えた積分のようなもの）：

Theorem（**同変 MacPherson 変換**）正規化条件 $(*)$ を満たす自然変換

$$C^G : \mathcal{F}^G(X) \to H^G_*(X) \quad (\ A^G_*(X)\ )$$

が唯一存在する：$(*)$ X が非特異ならば，$C^G(1\!\!1_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$.（註：これは quotient stack $[X/G]$ に対する MacPherson 変換と見なせる）．

G-affine space V が与えられたとき，G-invariant subvariety $\eta \subset V$ に対して，η の基本類の“G-同変 Poincaré 双対”を G-特性類で表したものを η の **Thom 多項式**と呼びます:$tp(\eta) = \mathrm{Dual}^G\ [\eta]_G \in H^*_G(V) = H^*_G(pt) = H^*(BG)$．上記の「写像の特異点」のケースでは，$V = J^l(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^{m+k})$, $G = \mathcal{K}^l_{m,m+k}$ = contact group of “coordinate changes”（但し $l, m \to \infty$ における安定化を要する）．η の**同変 Segre 類**を $s^{SM}(\eta, V) := c^G(V)^{-1} \cdot \mathrm{Dual}_G\ \iota_* C^G_*(1\!\!1_\eta) = tp(\eta) + \text{higher terms} \in H^*(BG)$ で導入すれば，tp の一般化として，自然変換 $s^{SM}: \mathcal{F}^G_{inv}(V) \to H^*(BG)$ を得ます（例えば $\chi(\eta(f))$ の“ユニヴァーサル”な表示が得られます）．

一方，$1\!\!1_X$ と $C^G_*(1\!\!1_X)$ よりも意味のある，stabilizer subgroup と commutator の情報を込みにした同変構成的関数の系列とそれらに C^G_* を施して得られる“quotient Chern class”の系列が定義できます（但し $\mathbf{Q}$-係数で定義される）．とくに G を有限群とすると，quotient Chern class は（一般化された）orbifold Euler 標数を leading term とする同変 Chern ホモロジー類になっています（X が非特異なら同変コホモロジー類）．

現在進行中または今後の展開として，対称積 $S^nX := X^n/S_n$ の系列について自然変換 $\prod z^n \mathcal{F}(S^nX; \mathbf{Q}) \to \prod z^n H_*(S^nX; \mathbf{Q})$ および S_nX の (orbifold) Chern 類の“母関数表示”?，多重点公式（多重特異点型の Thom 多項式）の一般化（$\mathcal{K}$ と S_n の積作用），moduli 空間上での“Thom 多項式”（量子 Thom 多項式？），曲線の moduli 空間の Chern 類と曲線の退化との関係，複素解析幾何における C^G_* の微分幾何的構成，絡み目の Kontsevich 積分?，などを考えています．

The Interstitial fluid flow in connective tissue and its numerical simulation

Ding Guanghong Yang Jin Yao Wei

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

Interstitial fluid is the surroundings that organism cells live in. Its physiological importance has been widely accepted. Researches on the interstitial fluid are very significant for studying traditional Chinese medicine and micro-environmental adjustment. Up to now， researches on the interstitial fluid have mainly focused on the components of interstitial fluid and great progresses have been made. But recent researches on interstitial fluid have been changed from studying static interstitial fluid to dynamic interstitial fluid. Interstitial fluid is not considered as isotropic stagnant gel and the flow of interstitial fluid has been studied. This article is to investigate the interstitial fluid flow in ligaments and tendons such as inter osseous membrane on lower limb, where there are relatively fewer capillaries than in other tissues. Dissecting experiments have showed that the distribution of blood capillaries in inter osseous membrane is not organized into meshes, but parallel arrays on certain direction which is approximate to the direction of parallel collagen fibrils on inter osseous membrane. In the traditional Chinese medicine background and according to the distribution of capillaries we built a two-dimension model. In this model the interstitium is thought to be vacuum and flow function-vortex function iteration method is applied to solve equations. The result of this model testifies that parallel capillaries can arise the directional interstitial fluid flow. Then in order to investigate the effect of parallel collagen fibrils on the interstitial fluid flow and the effect of the interstitial fluid flow on cells that live in it, we built two-dimension permeable model, two-dimension mast cell model, three-dimension permeable model and three-dimension mast cell model. In these models, the parallel collagen fibrils are assumed to be a porous media. First, through computing these models by the way of CFD, we obtained the effect of parameters on the interstitial fluid flow, such as pressure, distance between capillaries, permeability coefficient of the capillary's wall, porosity and so on. And the results of these models are according to the physiological phenomena and indicate that the parallel collagen fibrils can play a very important role in the interstitial fluid flow. The collagen fibrils can make the interstitial fluid flow relatively spatial uniform, so that their existence is in favor of the exchange of substance and the activities of cells in the interstitium. Second, the results indicate that the numerical order of maximum shear stress on cells in the interstitial fluid flow is the same as or greater than that of endothelial cell in blood flow. Due to the influence of the parameters to the interstitial fluid flow the shear stress can also be affected by these parameters. This article puts

forward a new area in the mast cell's research —— studying the influence of wall shear stress to mast cell's physiological activity and it's micro-surroundings. In addition, the results of three-dimension models show that the spatial specialty of capillaries' distribution is reasonable in physiology, which can also make the interstitial fluid flow spatial uniform.

社会紛争モデル：微分ゲームにおける非線形マルコフ完全均衡戦略について

板谷淳一（北海道大学　経済学研究科）

Abstract

現在、私は微分ゲームを使って社会紛争の数学モデルを構築して、その分析を行っています。特に、非線形マルコフ完全均衡と呼ばれる戦略集合の characterization を行っています。そのためには、動的計画法のベルマン方程式を解く必要があります。状態変数の数を1個にしているため、偏微分方程式を解く必要はなく、単純な常微分方程式を解くだけ十分です。 また、目的関数や動学的推移関数に対して簡単な関数形を仮定しているため、ベルマン方程式から value function を明示的に解くことも可能です。

それで、私の数学的な疑問点とは以下のようなものです。私は、非線形マルコフ完全均衡である最適戦略を明示的に求めたいのですが、それをするのには2つの方法があります。ひとつは、フェーズ・ダイアグラム（コントロール変数と状態変数の2次元の図）を用いて最適戦略を視覚的に characterization する方法と、value function を使って 最適戦略を明示的に導出する方法です。フェーズ・ダイアグラムを見る限り、最適戦略は上述の相空間における saddlepoint 経路上にある戦略であることがわかりました。そこで、2番目の方法で saddlepoint 経路上の最適戦略を明示的に解こうとしました。しかしながら、その結果得られた最適戦略関数（policy function）はフェーズ・ダイアグラムが示唆する結果と一致しません。

最初は、計算のエラーかと思い何度も再計算したのですが、やはり、両者の結果は一致しません。現時点では、なぜ、両者の結果が一致しないのか私にはわかりません。単純な計算上のエラーかもしれませんが、よろしく御助言いただければ助かります。

Crystallographic Texture and Residual Stress in Polycrystalline Solids: From Mathematical Theory to Industrial Applications

Chi-Sing Man
Department of Mathematics, University of Kentucky, USA

Abstract

In this talk I shall give a sampling of some recent research work conducted by my group and collaborators on the mathematics and mechanics of polycrystalline solids. Two topics will be presented: one concerns the effects of crystallographic texture on elastic response, and the other ultrasonic measurement of stress. In both instances, our work was motivated by industrial applications. But we strive to base our analysis squarely on rigorous mathematical theory. During this talk, for each topic, both the mathematical theory and the intended industrial application will be discussed.

Self-similar Solutions to Nonlinear Wave Equations

(Colloquium Lecture, July 21, 2004)

T. Ozawa

This talk is mainly based on recent joint work with Jun Kato [2,3,4]. We consider the Cauchy problem for nonlinear wave equations of the form

$$\Box u = f(u), \tag{NLW}$$

where u is a complex-valued function of $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ with $n \geq 2$, $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ is the d'Alembertian, $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ is the Laplacian in $\mathbb{R}^n, \partial_j = \partial/\partial x_j$, and $f(u)$ is a homogeneous function of degree $p > 1$, e.g., $f(u) = \pm \mid u \mid^{p-1} u, \pm u^p, \pm \mid u \mid^p$, etc. There is a large literature on the Cauchy problem and asymptotic behavior of solutions to NLW in function spaces built over the Lebesgue spaces. Self-similar solutions form an important class of solutions to nonlinear evolution equations with scaling structure, such as nonlinear heat equations, Navier-Stokes equations, nonlinear Schrödinger equations, generalized KdV equations, porus medium equation, mean curvature flow equation, etc. Due to propagation of singularity along the light cone and to an oscillatory phenomenon, self-similar solutions to NLW, however, do not fit into any framework of the available theories above. Recently, two methods were proposed by Pecher [7,8] in three space dimensions. One is based on the $L^{r'} \to L^r$ estimates on the free wavefunction. The other is based on the norm due to F. John taking space-time behavior of the free wavefunction into account. The former is naturally generalized to higher dimensions by Ribaud and Youssfi [9] for p greater than Mochizuki-Motai's critical exponent $p_1(n)$ and less than Sobolev's critical exponent $1 + 4/(n-2)$. The latter is naturally generalized to two and three dimensions by Hidano [1] for p greater than John-Strauss' critical exponent $p_0(n)$ and less than the conformal exponent $1 + 4/(n-1)$. Here we note that $p_0(n) < p_1(n) < 1 + 4/(n-1) < 1 + 4/(n-2)$.

In this talk, we present the third method to study self-similar solutions to NLW. We introduce Strichartz estimates on weighted Lorentz spaces over space-time $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. The main result is the existence and uniqueness of self-similar solutions to NLW with $p_0(n) < p < 1 + 4/(n-1)$ for small and radial Cauchy data.

Finally, we present an improvement to non-radial Cauchy data up to five space dimensions [5] based on the expansion by spherical harmonics, inspired by [6].

References.

[1] K. Hidano, Scattering and self-similar solutions for the nonlinear wave equations, Differential and Integral Equations **15**(2002), 405–462.

[2] J. Kato and T. Ozawa, On solutions of the wave equation with homogeneous Cauchy data, Asymptotic Analysis **37**(2004), 93–107.

[3] J. Kato and T. Ozawa, Weighted Strichartz estimates and existence of self-similar solutions for semilinear wave equations, Indiana University Math. J. **52**(2003), 1615–1629.

[4] J. Kato and T. Ozawa, Weighted Strichartz estimates for the wave equation in even space dimensions, Math. Z. (in press)

[5] J. Kato, M. Nakamura, and T. Ozawa, in preparation.

[6] S. Machihara, K. Nakanishi, M. Nakamura, and T. Ozawa, Endpoint Strichartz estimates and global solutions for the nonlinear Dirac equation, J. Funct. Anal. (in press)

[7] H. Pecher, Self-similar and asymptotically self-similar solutions of nonlinear wave equations, Math. Ann. **316**(2000), 259–281.

[8] H. Pecher, Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations, NoDEA **7**(2000), 323–341.

[9] F. Ribaud and A. Youssfi, Global solutions and self-similar solutions of semilinear wave equation, Math. Z. **239**(2002), 231–262

ミラー対称性，トーリック多様体，超幾何級数をめぐって

東京大学数理科学研究科，細野　忍

複素3次元 Calabi-Yau 多様体に基づく (位相的) 弦理論の $N=2$ 超対称なコンパクト化は，ミラー対称性をはじめ Gromov-Witten 不変量の計算への応用，$N=2$ 超対称ゲージ理論への応用，など種々の話題を提供している．

位相的弦理論の解析は，共形場理論に基づく分配和や，それのシグマモデルによる経路積分表示，また Landau-Ginzburg 理論と呼ばれる別の表示，などを横断的に行き来して行われる．数学者 Kontevich によると，このような位相的弦理論の解析で捉えているものは，Calabi-Yau 多様体上の連接層やそれの導来圏の性質，また，Calabi-Yau 多様体をシンプレクティック多様体と見て考えるときのラグランジュ部分多様体とそれらから作る圏 (深谷の圏) の性質であるという．特に，ミラー対称性はこれらの2つの圏同値として述べられると予想され，ホモロジー論的ミラー対称性予想と呼ばれている．

ここでは,「計算可能な例」を構成し調べるという立場から，トーリック多様体を用いたミラー対称性の記述，(Gromov-Witten 不変量の計算への応用,) 周期積分を表す超幾何級数のモノドロミー性質に見られるホモロジー論的ミラー対称性，などの (最近の？) 話題を取り上げる．とくに，局所ミラー対称性と呼ばれる非コンパクト Calabi-Yau 多様体の場合に，関連する超幾何級数とそのモノドロミー性質について1つの (自然な) 予想を述べる．

Numerical differentiation and its applications

Yanbo Wang (Fudan University)

Abstract

Numerical differentiation is a classical ill-posed problem in the sense of Hadamard. Small errors in the measurement may cause huge errors in the numerical results. Some regularization methods are used to solve this problem. In this paper, we discuss the numerical differentiation problem by Tikhonov regularization. A simple solution based on Spline functions is used for one-dimensional cases, and a solution based on Green function is used for two-dimensional cases. By using a simple way to choose the regularization parameters, we show that many computations are saved. Here we discuss the existence and uniqueness of the solution, for both the one-dimensional case and two-dimensional case. The error estimates are also given. For one-dimensional cases, the high-order derivatives are discussed.

We give numerical examples and applications for both the one-dimensional and two-dimensional cases. The applications in corrosion detection for thin plate, image edge detection and Computer Tomography are discussed.

確率セルオートマトンの双対性

今野紀雄（横浜国立大学大学院 工学研究院）

Abstract

双対性 (duality) の概念は様々な分野で現れ，それぞれ定義が異なるようであるが，ここでは確率セルオートマトンの時間反転対称性に対応する双対性について考える．この双対性の重要性は，例えば考えている確率モデルの定常分布の存在を示すことが出来たり，あるいはモデルによっては具体的な定常分布の形を決定することが可能となることである．また「双対性」は，確率セルオートマトン（や無限粒子系）の数学的な手法の中では,「カップリング」の手法と並んで，非常に良く用いられる手法の一つである．本講演では特に，２状態２近傍系の確率セルオートマトン（Domany-Kinzel model）を中心に，相転移現象とその周辺に関する結果を「双対性」に焦点をあて解説する．

超幾何っぽく見える／見えない微分方程式

落合啓之（名古屋大学大学院　多元数理科学研究科）

Abstract

種々の状況で生ずる具体的な微分方程式は、一見、超幾何っぽく見えたり見えなかったりするが、見かけや期待とは違う結論になることも時々ある。統一的な研究手段があるわけではないが、講演者が遭遇した例や問題を提示したい。

パンルヴェ方程式の幾何学

岩崎　克則

(九州大学 大学院数理学研究院)

概　要

この講演では，パンルヴェ第 VI 方程式について考察する。この方程式は，十九世紀から二十世紀への変わり目に P. パンルヴェとその弟子 B. ガンビエによって発見された，六種類の二階非線形常微分方程式の中の一つである。特殊関数論的には，二階線形常微分方程式であるガウスの超幾何方程式の非線形版に相当する。パンルヴェ第 VI 方程式の外見はかなり不恰好であるが，実はその背後に極めて豊かな幾何学的構造が横たわっている。これらの構造と関連させて，パンルヴェ第 VI 方程式のダイナミックスを論じることは興味深い。この講演では，リーマン・ヒルベルト対応の観点に立ち，さまざまな幾何学的手法を用いて，この力学系の諸様相をできるだけ統一的・包括的に紹介したい (時間の関係で一部分に留まるかもしれないが)。

キーワード

パンルヴェ第 VI 方程式, 非自励ハミルトン力学系, 共役写像の方法, 幾何学的パンルヴェ性，解析的パンルヴェ性，安定放物型接続のモジュライ空間, 基本群の表現のモジュライ空間，リーマン・ヒルベルト対応, リーマン・ヒルベルト問題, アフィン・ワイル群, 等モノドロミー流, パンルヴェ流, リッカチ流, 組み紐群, モジュラー群, アフィン三次曲面族, ベックルント変換, 単純孤立特異点, 最小特異点解消, ロンスキアン構成，正準座標，離散力学系

目　次

1. はじめに
2. 力学系としてのパンルヴェ方程式
3. 安定放物型接続のモジュライ空間（相空間）
4. リーマン・ヒルベルト対応（共役写像）
5. 等モノドロミー流とパンルヴェ流
6. アフィン三次曲面の族
7. ベックルント変換（対称性）
8. 非線形モノドロミー (ポアンカレ回帰写像)
9. 特異点解消とリッカチ解（古典軌道）
10. ロンスキアン構成と正準座標
11. まとめ

ミンコフスキー空間内の擬球面微分幾何とルジャンドル双対性について

泉屋　周一　（北海道大学大学院理学研究科）

微分幾何学の歴史を眺めてみると、「ガウスの驚異の定理」以降はリーマンの登場とそれに繋がる内在的性質の研究が中心となるが、それ以前の素朴な部分はガウス自身の研究においても曲面の埋め込み方、すなわち法線ベクトル場の性質による外在的な微分幾何学である。これらは、それ以前のオイラーやラグランジュによる微積分学の整備を基礎としている。実際、関数のグラフの形状を調べるために、極値問題が２次までの情報（ヘッセ行列）をもとに考えられているように、ガウスの曲面論においても、高さ関数の２次までの情報（ガウス曲率や主曲率、Dupin 標形）を用いて曲面の局所的な形状の研究が行われている。平面曲線の局所的性質がより高次の状況まで把握されているのに比較して曲面が２次までの形状しか研究されていなかったのは、多変数の微積分学の限界によるものであった。この事情は２０世紀後半になり一変する。その頃から関数の特異点論が爆発的に発展したことによる。微積分学を関数の特異点の研究の初期段階である理解すると、トムの基本カタストロフ理論はその自然な一般化であると言える。１９７０年代以降、トムの理論の微分幾何学への応用が（主として、英国やロシアで）精力的に推し進められてきた。この流れの研究を「ガウスの微分幾何学」に対して「トムの微分幾何学」と呼ぶ。「ガウスの微分幾何学」が単独の高さ関数の安定特異点（モース型特異点）の情報を用いるのに対して、「トムの微分幾何学」は高さ関数族の安定特異点の情報を用いる分だけより詳しい幾何学的情報が得られる。このように、関数から関数族への一般化がより詳しい幾何学的情報を得るために有効である。講演者はここ７年ほど、様々な構造の微分幾何学へトムのアイデアを適用することを試みてきた。その結果、関数族の概念の幾何学的一般化であるルジャンドル特異点の情報から、さらに詳しい幾何学的情報がわかるといういくつかの例が得られた。ここでは、そのような微分幾何学を「ルジャンドル微分幾何学」と呼びたい。本講演では、「ガウスの微分幾何学」の復習から始め、ルジャンドル微分幾何学が有効な一つの例として、ミンコフスキー空間内の擬球面幾何学上の部分多様体論について、最近までに得られた結果を報告する。ミンコフスキー空間内では擬球面はド・シッター空間（正半径），双曲空間（負半径），光錐（零半径）の三種類が存在する．ここで，双曲空間は負定曲率を持つリーマン空間としてガウス・ボヤイ・ロバチェフスキーの非ユークリッド空間のモデルとなり現在でもその部分多様体論は活発に研究されている．また，ド・シッター空間は定曲率のローレンツ空間であり宇宙論においても重要な意味を持つ．いずれにせよこの２つの擬球面では準・リーマン幾何学が成り立ちある程度の一般的なテンソル解析の議論が成立する．しかし，光錐上では，ミンコフスキー内積が退化してしまい，前記の２つの擬球面とは状況がまったく異なる．しかも,『３次元以上の単連結リーマン多様体に対して，等角的に平坦であるための必要十分条件はその多様体がミンコフスキー空間内の光錐の中に空間的超曲面として等長的に埋め込まれることである』という Asperti-Dajczer の定理から，光錐内の空間的超曲面の微分幾何学の研究は重要である．しかし、光錐内の超曲面に対しては光錐の接空間上における法線と言う概念が存在しないので、それ以外の場合のようなガウス写像とその微分（ワインガルテン写像）等の構成が不可能のように思われる。ここでは、「擬球面間のルジャンドル双対性」を示す事により、光錐内の空間的超曲面にたいしてもある種の「法線」を定める事が出来、その結果ガウス写像などが定まり幾何学的不変量（光錐的ガウス曲率、光錐的平均曲率）が得られることを紹介する。この曲率の幾何学的意味として「平坦で全臍的なものは方物的超曲面である」ことがわかる。さらにこれらの曲率は従来の曲率と大変違った性質をもつこともわかる。その一例として、３次元光錐の中で考えると光錐的ガウス曲率は「法線」に依存した外在的量であるが、光錐的平均曲率は第一基本量 (リーマン計量）から得られる断面曲率（内在的量）に一致する事がわかる。ガウスは曲面論においてそのガウス曲率が断面曲率に一致（ガウスの驚異の定理）して驚いたのであるが、この結果はまさに（私にとっての）「ビックリ定理」である。一方「正規化された光錐的ガウス曲率」について、大域的なガウス・ボンネ型定理が成りたち、大域的には内在的な量となっている「これまたビックリ」!!

あるアメーバ様生物がつくる 輸送ネットワークの形と機能

中垣俊之　（北大・電子研）

Abstract

真正粘菌モジホコリの変形体は、多核で巨大なアメーバ様単細胞生物であり、まるでパンに塗り広げたマスタードペーストのような外観を呈す。しかし、このねばねばした高分子溶液の如き変形体は、ちゃんと機能的に振舞える。たとえば、好きなところへは近寄るし、嫌いなところからは逃げる。さらに、迷路の最短経路を探し出すなど、“単細胞”などと侮ることのできない計算能力を示す。このような変形体の巧みな機能は、体内の流路ネットワーク形成と深く関わっている。変形体には手足のような運動器官も心臓血管系も神経系もないが、機能的にはこの流路ネットワークが移動運動をはじめ物質循環や情報伝達を担っている。すなわち、流路ネットワークは栄養分のみならず体そのものの輸送や化学・物理信号の伝達もおこなうので総合的なコミュニケーションネットワークなのである。このネットワークは、外界の状況に依存してダイナミックに作り変えられるため、機能的なネットワークが自己組織化するさまを観察するには誠に都合がよい。変形体ネットワークの形と生理機能について得られた実験結果を述べ、その研究中に生じたいくつかの問題一おそらく数学が関連するのではないかと思われる問題一について触れたい。

特別講演
G-CONSTELLATIONS AND RESOLUTIONS OF QUOTIENT SINGULARITIES

TIMOTHY LOGVINENKO
(KYOTO UNIVERSITY, RIMS)
2005 年 2 月 23 日 (水), 15:30-16:30
於 3-508

Abstract

G-Constellations, where G is a finite subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, are a generalisation of the concept of an orbit of G in $\mathbf{C}^n$, which arose out of trying to construct the crepant resolutions of the quotient singularity $\mathbf{C}^n/G$ as moduli spaces of scheme-theoreti$G$-orbits. For a case of an abelian G, we ask what are the families of G-Constellations, which can be parametrised by a given resolution of $\mathbf{C}^n/G$. A complete classification is given and the finiteness is proved.